ANÁLISE DE ECONÓMICA •26

Raquel Díaz Vázquez
Departamento de Fundamentos del Análisis Económico e Historia
e Instituciones Económicas
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Vigo
Lagoas-Marcosende, s/n 36200 VIGO (Pontevedra)
Telf.: 986 812522. Fax: 986 812401.
E-mail: rdiaz@uvigo.es

CRECIMIENTO CON PROGRESO TÉCNICO EN EL MODELO DE JOHN VON NEUMANN

ENTIDAD ES COLABORADORES

Fundación Caixa Galicia
Consello Económico e Social de Galicia
Fundación Feiraco
Instituto de Estudios Económico de
Galicia Pedro Barrié de la Maza
Caixanova

Edita: Servicio de Publicación da Universidade de Santiago de Compostela
ISSN: 1138 - 0713
D.L.G.: C-1689-2003

CRECIMIENTO CON PROGRESO TÉCNICO EN EL MODELO DE JOHN VON NEUMANN(*)

RAQUEL DÍAZ VÁZQUEZ

ABSTRACT

In this paper we analyse the effects of including Technological Progress in the original John Von Neumann's Model. First, we show that it is possible to eliminate the assumption of constant technology of the von Neumman's original model maintaining the conditions of "balanced growth". As result, we show that it is possible to obtain a rate with "balanced growth" for the economy expanding with Technological Progress. Also, we show that the expanding economy rate with Technological Progress has a minimum which is the maximum expanding economy rate without Technological Progress. So, this paper is the first step in a new line of research in multi-sector economic growth models, and where there is not restrictions about the functional form between input and output. These two are the most important differences between this model and the Solow's model.

Keywords: Multi-sector economic growth model, Technological Progress, Balanced growth.

RESUMEN

En este trabajo se analizan los efectos de la inclusión del Progreso Técnico en el modelo de crecimiento de J. Von Neumann. En primer lugar, se demuestra que es posible eliminar el supuesto de tecnología constante con el que opera J. Von Neumann y mantener al mismo tiempo las condiciones necesarias para que exista "crecimiento equilibrado". Como resultado, se obtiene una senda de "crecimiento equilibrado" para una economía que se expande gracias al Progreso Técnico. Además, se comprueba que estas tasas de crecimiento con Progreso Técnico tienen un mínimo que es, precisamente, la tasa máxima de crecimiento de la economía sin Progreso Técnico. Este trabajo representa el primer paso dentro de una nueva línea de investigación con modelos de crecimiento multisectoriales en los que, adicionalmente, no se impone ninguna restricción en cuanto a la forma funcional que relacione el input con el output. Éstas son las dos grandes características que lo diferencian del modelo tradicional de Solow.

Palabras clave: Modelo de crecimiento multisectorial, Progreso Técnico, Crecimiento equilibrado.

(*)La autora agradece a Esperanza Sanmartín Carbón, Profesora Titular en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Vigo, su apoyo y su ayuda, así como sus sugerencias relativas a cuestiones matemáticas de este trabajo.

1. INTRODUCCIÓN

John Von Neumann destaca en el mundo económico por sus descubrimientos en dos campos fundamentales del análisis económico: Teoría de Juegos y Crecimiento. De él se dice que es el creador de la Teoría de Juegos al publicar en 1928 su primer artículo sobre este tema[1] y, en 1944, en colaboración con Oskar Morgenstern, la *Theory of Games and Economic Behavior*. Las formulaciones matemáticas descritas en este libro han influido notablemente en el análisis económico a partir de entonces. Reinhard Selten -Premio Nobel de Economía en 1994 junto a John F. Nash y John C. Harsanyi por sus avances en el análisis del equilibrio en la Teoría de Juegos- reconoce en su autobiografía haber iniciado sus pasos en el análisis de la Teoría de Juegos a partir del libro de J. Von Neumann y Oskar Morgenstern. John C. Harsanyi publica a primeros de los años cincuenta una serie de artículos siguiendo las funciones de utilidad en bienestar económico y en ética descritas por estos autores y Kenneth Arrow -Premio Nobel en 1972- y Gerad Debreu –Premio Nobel en 1983- también se basaron en su axiomatización de la teoría de la utldad para resolver problemas de Equilibrio General[2].

Sin embargo, en 1937, J. Von Neumann también publicaba un innovador artículo sobre el crecimiento económico en un contexto de equilibrio general. Era un modelo multisectorial en el que se demostraba que podía existir crecimiento en equilibrio bajo el supuesto de la existencia de varios sectores en la economía. Permitía tratar las consecuencias de la naturaleza circular del proceso de producción –en el que una mercancía podía ser producida por medio de otras o incluso por sí misma-. Desarrollaba una teoría de los precios determinados exclusivamente por el coste mínimo de los bienes obtenidos a partir de otros bienes y una teoría de tipo de interés determinado por la mayor tasa de expansión posible del sistema económico. Constituía, además, el primer modelo riguroso y formal de la teoría del capital no agregado.

Ahora bien, la definición de "crecimiento en equilibrio" implicaba la obligada incorporación en el modelo de determinados supuestos muy restrictivos sobre la tecnología. Su definición de equilibrio era muy similar a la del estado estacionario en el sentido de que en equilibrio se permite una expansión uniforme de todo el sistema. Los precios permanecían constantes, las intensidades relativas de los distintos procesos de producción no variaban y la producción de todos los bienes permanecía en la misma proporción, aunque se permitía una tasa geométrica uniforme de crecimiento de todo el sistema. Ello parecía implicar, además del supuesto de condiciones de competencia perfecta en el largo plazo y de la existencia de rendimientos constantes en cualquier proceso económico –en el sentido de que cada proceso puede llevarse a cabo a x veces su escala dada, sin aumentos o disminuciones en los costes por unidad de "output"-, la necesidad de que la tecnología permaneciese constante a lo largo del tiempo. Como cada output generado en un determinado período de tiempo, sería utilizado como input en el siguiente período, debía aparecer en el sistema económico en las mismas proporciones y en la misma intensidad que en el período anterior, para poder permitir la expansión uniforme y, por ello, "equilibrada" de todo el sistema. La definición de crecimiento equilibrado y la necesidad de que las intensidades relativas de los procesos productivos del sistema permaneciesen constantes a lo largo del tiempo, llevaba aparejado de forma implícita que las intensidades relativas de los inputs y, por tanto de los outputs –que serían los inputs del siguiente período- fueran constantes. Este supuesto implícito de intensidades relativas constantes de los inputs para todos los períodos de tiempo "obligaba" a J. Von Neumann a operar con el supuesto de *tecnología constante* de manera que para todos los bienes la ratio output/input permanecía constante no sólo en cada período para cada bien, sino también para

[1] "Zur Theory del Gesellshaftspiele", en *Mathemathische Annalen.*

[2] Incluso los escritos de John F. Nash en este campo son posteriores al trabajo de los citados autores. J. Von Neumann y Oskar Morgenstern ya habían mostrado una solución similar a la del "equilibrio de Nash", aunque exlusivamente para los juegos de suma cero.

todos los bienes durante todos los períodos de tiempo. La "necesaria" incorporación de este supuesto y, por ello, la "imposibilidad" del tratamiento del *Progreso Técnico* en su modelo y sus posibles efectos sobre la tasa máxima posible de crecimiento equilibrado del sistema generaba numerosas críticas [Champernowne (1945-1946), Koopmans (1964)] y relegaba casi al olvido a este precursor modelo de crecimiento multisectorial en un contexto de equilibrio general[3].

Sin embargo, como se verá en el presente trabajo, es posible demostrar que, bajo determinados supuestos, la incorporación del Progreso Técnico en el modelo de J. Von Neumann es posible, sin que por ello se alteren las restantes condiciones necesarias para la obtención de una tasa de crecimiento equilibrado –bajo la definición de "equilibrio" dada por J. Von Neumann-. El supuesto de intensidades relativas constantes de los inputs a lo largo del tiempo no "obliga" al supuesto de *tecnología constante*. Para facilitar dichas demostraciones recurriremos en este trabajo al cálculo matricial, de manera que esta conversión del modelo original de Von Neumann a términos matriciales así como la construcción de la matriz de output que garantiza el crecimiento equilibrado en cada período serán los instrumentos fundamentales que permitirán ofrecer una clara visión del significado del *crecimiento equilibrado* y sus implicaciones. En los mismos términos, la obtención de las sendas de crecimiento equilibrado con y sin Progreso Técnico permitirán comprobar las diferencias entre ambos crecimientos equilibrados. Además, será posible obtener una tasa máxima de crecimiento equilibrado que dependerá de la capacidad que ese Progreso Técnico tenga de generar incrementos en el output. Adicionalmente, será posible demostrar que la tasa de crecimiento en equilibrio del sistema bajo la existencia de dicho Progreso Técnico tendrá un mínimo, que será precisamente la tasa máxima de crecimiento en equilibrio del sistema bajo la inexistencia de dicho Progreso Técnico.

Con este trabajo, lo que se proyecta, es retomar la línea investigadora iniciada por J. Von Neumann, considerando modelos de crecimiento multisectoriales y en donde no se imponen restricciones sobre el tipo de forma funcional que relacione el input con el output. Con ello, se eliminan algunas de las restricciones que imponen los modelos tradicionales de crecimiento -funciones Cobb-Douglas, dos factores de producción (capital y trabajo), entre otros-.

2. LA TECNOLOGÍA EN EL MODELO DE EQUILIBRIO GENERAL DE VON NEUMANN

El objetivo de este apartado es presentar, pero también, desarrollar y ampliar el modelo original diseñado por J. Von Neumann con el objeto de determinar las implicaciones de su definición de "*crecimiento equilibrado*". A diferencia de la versión original de J. Von Neumann, en este trabajo se presentará el modelo también de forma matricial. La construcción de las matrices de input y output pero, sobre todo, la del "output" requerido para mantener la producción en el siguiente período será el instrumento básico que permitirá ofrecer una visión clara de las implicaciones sobre la tecnología que asume el modelo original.

Dos de las características distintivas del modelo de crecimiento de J. Von Neumann son, en primer lugar, la existencia de m factores de producción y n bienes dentro del sistema económico en cada período de tiempo, en lugar de los *2* habituales –capital y trabajo- y, en segundo lugar, la naturaleza circular del proceso de producción, en donde cada bien, para ser producido, requiere determinadas cantidades del resto de bienes o incluso de parte de sí mismo. De ello se deduce que el bien X_1 es elaborado con la ayuda del bien X_2 y, en ese mismo período, el bien X_2 es a su vez elaborado con la ayuda del bien X_1.

[3] Pese a las complejidades matemáticas del modelo de J. Von Neumann, existieron varios intentos de relajar algunos o varios de los supuestos implícitos en dicho modelo. Destaca la realizada por Dorfman, Samuelson y Solow (1958) en la que se acepta la existencia de un stock de capital dado disponible al inicio del período en consideración, pero en el que se sigue manteniendo el supuesto de tecnología constante de producción.

Por ello, J. Von Neumann supone que existen n bienes $X_1,...,X_n$ que pueden ser elaborados por m procesos productivos $F_1,...,F_m$, en donde cada proceso productivo F_i, $i = 1,\dots,m$, se define como una aplicación de los diferentes bienes X_j $j = 1,\dots,n$, tal que:

$$F_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\right) \quad \to \quad \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, X_j\,, \qquad i = 1,\dots,m, \qquad [1]$$

en donde a_{ij} se definen como los requerimientos unitarios necesarios (input) del bien j en el proceso i y b_{ij} como el coeficiente obtenido (output) del bien j en el proceso i.

Si recurrimos al cálculo matricial, este sistema económico, en términos de procesos económicos, input y output, descrito por J. Von Neumann en [1] podríamos expresarlo como:

$$F\,(AX)=BX, \qquad [2]$$

siendo

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_m \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}. \qquad [3]$$

Debe insistirse en que la columna j-ésima de la matriz A representa el total de requerimientos productivos unitarios de cada bien j que exigen todos los procesos productivos, $j = 1,\dots,n$ [(4)], y la fila i-ésima representa el total de requerimientos unitarios de todos los bienes que exige cada proceso productivo i, $i = 1,\dots,m$ [(5)]. En los mismos términos, la columna j-ésima de la matriz B representa el total de cantidades producidas del bien j, $j = 1,\dots,n$, en términos de coeficientes que generan todos los procesos productivos y la fila i-ésima representa el total de cantidades producidas de todos los bienes expresadas en coeficientes que genera cada proceso productivo i, $i = 1,\dots,m$.

Dada la totalidad de bienes existentes en la economía en cada período de tiempo, cada uno de estos procesos productivos F_i se empleará en unas determinadas *intensidades* q_i, $i = 1,\dots,m$, por lo que la producción total que se obtiene en cada período en la economía será igual a:

$$Y = \sum_{i=1}^{m} q_i F_i = (q_1, q_2, \dots, q_m)\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ Fm \end{pmatrix} = QF\,, \qquad [4]$$

siendo $Q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$, con

$$q_i \geq 0\ ^{(6)}, \qquad [5]$$

$$\sum_{i=1}^{m} q_i > 0\ ^{(7)}, \qquad [6]$$

e Y el total de bienes en cada período de tiempo.

Dados [2] y [4] podemos definir:

$$\sum_{i=1}^{m} q_i a_{ij} : \textit{ total de requerimientos del bien } j,\ j = 1,\dots,n \qquad [7]$$

---

4 En este sentido, la columna 1 indicaría lo que requieren del bien *1* los distintos procesos productivos desde el *1* hasta el *m*.

5 Análogamente, la fila 1 reflejaría las cantidades que el proceso *1* necesita de todos los bienes desde el *1* hasta el bien *n*.

6 El caso particular en el que $q_i = 0$ indicaría que ese proceso *i* no sería utilizado, $i = 1,\dots,m$.

7 Para evitar aquella situación en la que $q_1 = \cdots = q_m = 0$.

(dado que representa el producto de la matriz *Q* por cada columna de la matriz *A*) y

$$\sum_{i=1}^{m} q_i b_{ij} : \textit{total producido del bien } j,\ j = 1,\dots,n \qquad [8]$$

(dado que representa el producto de la matriz *Q* por cada columna de la matriz *B*).

Por lo que si denotamos por los subíndices *0* y *1* la totalidad de bienes existentes al inicio y final del primer período, respectivamente, una vez llevado a cabo todos los procesos productivos obtenemos:

$$\begin{aligned} Y_0 &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} q_i a_{ij} x_j = QAX \\ Y_1 &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} q_i b_{ij} x_j = QBX \end{aligned} \qquad [9]$$

La descripción del sistema económico recogido en las expresiones [1] a [9] implica la asunción de varios supuestos, implícitos o ya explícitos en el modelo de J. Von Neumann:

(i) Los bienes de capital figuran en ambos lados de la aplicación, es decir, son tanto un input como un output del proceso productivo,

(ii) cada proceso dura una unidad de tiempo, por lo que si existen procesos productivos que requieren una mayor duración, se dividen dichos procesos en el tiempo las veces que sean necesarias para obtener el bien final y cada uno de los bienes obtenidos en cada subproceso se consideran inputs intermedios necesarios para la elaboración del bien final,

(iii) cada subproceso del supuesto *(ii)* es considerado un proceso en sí mismo, por lo que los inputs requeridos en estos nuevos procesos serán "factores naturales de producción", bienes finales obtenidos en los restantes procesos productivos llevados a cabo en el período anterior, o bienes intermedios, y el output obtenido será a su vez un nuevo bien intermedio o el producto final,

(iv) para cada proceso productivo las relaciones $\dfrac{a_{ij}}{a_{ij+1}}$ permanecen constantes, $j = 1,\dots,n$. Ello implica que las intensidades factoriales en cada proceso *i* no varían, $i = 1,\dots,m$. Variaciones en dichas intensidades implicarían un nuevo proceso. Este es uno de los supuestos fundamentales y más restrictivos del modelo de J. Von Neumann. Cada proceso productivo requiere una determinada combinación de inputs que no se puede modificar. Una vez elegido un proceso productivo, no se permiten variaciones en las intensidades factoriales relativas del mismo, por lo que se perpetúan a lo largo del tiempo.

El modelo hasta ahora descrito refleja un sistema económico en un período de tiempo determinado en el que se permite la transformación de unos bienes en otros bienes. Para que se pueda hablar de crecimiento económico es necesario definir las relaciones input-output que se deben mantener a largo de los diferentes períodos. Si, además, lo que se persigue es un "*crecimiento equilibrado*" tal que se pueda justificar un crecimiento del output continuo y permanente, las relaciones input-output que se deben establecer son más complejas, pero a su vez, más restrictivas. Por ello, J. Von Neumann –con el objeto de encontrar aquella tasa que permita el máximo crecimiento posible del sistema económico pero de forma que con lo producido en cada período se garantice el crecimiento de la producción en el siguiente- incorpora de forma explícita o implícita los siguientes supuestos:

(v) El input de un período será el output del período anterior. Es el supuesto clave de su modelo. Se está considerando con ello una economía cerrada en la que los requerimientos productivos para determinados bienes no puedan provenir del exterior. Para la producción de cualquier período sólo se puede partir de lo producido en esa economía en el período anterior. Esto implica que en cada

período de tiempo deben existir una serie de procesos productivos capaces de generar el output necesario en cuanto a intensidades relativas y proporciones relativas que, al ser utilizados como inputs en el siguiente período de tiempo, garanticen a su vez la elaboración de un output que mantenga la misma estructura en cuanto a proporciones relativas e intensidades que el output del período anterior. Sólo en ese caso se podría hablar de crecimiento equilibrado.

(vi) Los factores de producción pueden crecer de forma ilimitada. Este supuesto no implica que en cada período, las cantidades de cada input requeridas o las generadas por los diferentes sistemas productivos sean ilimitadas. Al contrario, dado que se parte de la existencia de un número de bienes limitados al inicio del proceso, las cantidades de output que se obtienen en cada proceso productivo son limitadas. Como el output de un período es el input del período siguiente, en cada período, las cantidades de input y output están dadas.

(vii) Los capitalistas reinvierten todo su output y los trabajadores consumen toda su renta. Con ello se asegura que cualquier producción en exceso de las necesidades de vida de trabajadores y empleados sea reinvertida.

(viii) Existen rendimientos constantes de producción que implican que cada proceso puede llevarse a cabo a x veces su escala dada. No varía la relación output/input en función del número de veces que se repite un proceso

(ix) Las ratio en las intensidades $\frac{q_i}{q_{i+1}}$ con que se usan los distintos procesos permanece constante a lo largo del tiempo, aunque $q_1, \ldots, q_m$ pueden cambiar, lo que permite el uso de cualquier unidad de medida temporal, $i = 1, \ldots, m$. Sin embargo, este supuesto también impide que entren nuevos procesos productivos que supongan una alteración en las intensidades factoriales empleadas de cada bien.

El supuesto *(v)* es una clara restricción. Para que la producción de cada bien esté garantizada en el futuro, es necesario que para todos y cada uno de los bienes, como mínimo, la cantidad que se genere en cada período coincida con el input total que exigieron los distintos procesos. Si lo que se quiere es un crecimiento del sistema, entonces, como requisito imprescindible, el output obtenido de todos y cada uno de los bienes ha de superar a su respectivo input. Ello implica que, dados [7] y [8] el total producido de cada bien debe superar al total de requerimientos de dicho bien, es decir:

$$\sum_{i=1}^{m} q_i b_{ij} > \sum_{i=1}^{m} q_i a_{ij}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

$$\Rightarrow \exists \alpha_j > 1 \textit{ tal que } \sum_{i=1}^{m} q_i b_{ij} = \alpha_j \sum_{i=1}^{m} q_i a_{ij}, \qquad \forall j = 1, \ldots\ldots, n. \tag{11}$$ [8]

[8] Según la definición de crecimiento de Von Neumann, para cada bien el output debe superar al input en una determinada tasa α. No asume que cada proceso proceso productivo deba generar un output superior al input requerido. Además, de la definición extraída del modelo de Von Neumann y expresada en [11] se deduce que, para cada bien, todos los procesos productivos generan el mismo incremento de output –en términos matemáticos, cada miembro de una misma columna de la matriz A aparecería multiplicado por el mismo α, tal que α sería únicamente diferente entre columnas, dado que sería diferente para cada bien-. En lugar de esta definición podría haberse operado con una definición alternativa de crecimiento en la que el incremento de output de cada bien variase también entre los diferentes procesos. Ello implicaría que $\exists \alpha_{ij}$ tal que $\sum_{i=1}^{m} q_i b_{ij} = \sum_{i=1}^{m} q_i \alpha_{ij} a_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$. En cualquier caso, el operar con esta última definición no alteraría los resultados sobre la obtención de la tasa máxima de crecimiento equilibrado, por lo que se ha optado por mantener la definición de crecimiento de J. Von Neumann.

Por tanto, *para todo el sistema económico se debe verificar que:*

$$(q_1,\ldots,q_m)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = (q_1,\ldots,q_m)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} . \quad [12]$$

Dado que los α_j pueden ser diferentes para cada bien, existirán bienes que se incrementarán a una tasa mayor que otros. Sin embargo, el supuesto *(v)* determina lo que ocurrirá en este caso. Como el input de un período es necesariamente el output del período anterior, para que la producción esté garantizada en el futuro, *la distribución del output total al final de un período debe ser proporcional al input requerido al inicio del período* para poder así repetir la producción en los siguientes períodos, lo que implica que todos los bienes deben crecer a la misma tasa para que se mantenga su distribución inalterada. En ese caso, hablaríamos de *crecimiento equilibrado*. Ello implica que *existe crecimiento equilibrado* cuando para todos los bienes, el output obtenido que actuará como input en el período siguiente es igual de proporcional a su respectivo input del período anterior, es decir,

$$\sum_{i=1}^{m} q_i' b_{ij}' = \alpha^* \sum_{i=1}^{m} q_i a_{ij}, \qquad j = 1,\ldots,n, \qquad [13]$$

en donde, además, q_i' y b_{ij}' deben cumplir los supuestos expresados en *(iv)* y *(ix),* siendo q_i' la intensidad con que se repetirá el proceso productivo i en el siguiente período de tiempo, $i = 1,\ldots,m$ y siendo b_{ij}' cada uno de los coeficientes de outuput obtenidos en este período pero que serán empleados en el siguiente, $j = 1,\ldots,n$.

Si expresamos [13] en términos matriciales podemos decir: *existe crecimiento equilibrado según J. Von Neumann cuando se verifica*:

$$(q_1',\ldots,q_m')\begin{pmatrix} b_{11}' & \cdots & b_{1n}' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}' & \cdots & b_{mn}' \end{pmatrix} = \alpha^*(q_1,\ldots,q_m)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad [14]$$

siendo

$$\alpha^* > 1. \qquad [15]$$

Y ello es cierto para

$$\alpha^* = \min\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} = \min\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m} q_i' b_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} q_i a_{ij}}\right\}, \qquad j = 1,\ldots,n. \qquad [16][9]$$

Las expresiones [13] a [16] requieren dos explicaciones adicionales:

1. Las condiciones [13] a [16] son condiciones necesarias de crecimiento equilibrado de la producción. El crecimiento equilibrado requiere un mismo α (α *) para todos los bienes y, además, que ese α *sea igual al mínimo de todos los α_j existentes. Un $\alpha^* > \alpha_{\min}$ no permite un crecimiento equilibrado dado que existiría escasez del output del bien *j* para el

[9] Si, en lugar de haber operado con α_j se hubiera considerado α_{ij}, el α_{ij} que garantizase el crecimiento equilibrado sería igual a $\alpha^* = \min\{\alpha_{ij}\} = \min\left\{\frac{q_i' b_{ij}}{q_i a_{ij}}\right\}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$.

que $\alpha_j < \alpha^*$, lo que impediría la aplicación de alguno de los procesos productivos que lo requieren como input necesario y, por ello, el mantenimiento del sistema económico. Debe tenerse presente que aunque α^*sea igual al mínimo de todos los α_j, este valor nos está dando la tasa máxima de crecimiento posible de todo el sistema económico, por lo que en realidad es una condición de máximo posible o máximo viable de crecimiento equilibrado. Siguiendo la terminología de J. Von Neumann, α^* sería el "*coeficiente de expansión de la economía global*" por unidad de tiempo.

En cualquier caso, esta condición no determina realmente cuál será el volumen total de output de cada período. Las condiciones [13] a [16] simplemente indican que en crecimiento equilibrado el propio sistema económico debe adoptar un mismo α^* para todos los bienes y todos los procesos y que, obligatoriamente, debe ser el menor de todos los α_j existentes para poder garantizar la producción en el futuro. Pero en el sistema económico pueden existir $\alpha_j > \alpha^*$. En este caso, el sistema genera excesos de producción que no serán utilizados en los procesos productivos del siguiente período. En esta situación, estos excedentes de producción reciben el nombre de *bienes libres* y su precio será igual a cero. Es por ello por lo que J. Von Neumann introdujo su *Regla de los bienes libres*: dado [11] y siendo p_j el precio del bien j, $j = 1,\dots,n$.

$$\sum_{i=1}^{m} q_i b_{ij} \geq \alpha^* \sum_{i=1}^{m} q_i a_{ij}, \qquad \forall j = 1,\dots,n \qquad [17]$$

y para aquel bien j que en [17] obtenga > se aplica $p_j=0$. [18]

En definitiva, serán bienes libres aquellos para los cuales $\alpha_j > \alpha^*$, es decir, $\forall j$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m} q_i b_{ij} > \alpha^* \sum q_i a_{ij} \ , j = 1,\dots,n. \qquad [19]$$

2. Pero, además, la expresión [14] tiene una implicación adicional.

Si $Q' = (q'_1,\dots,q'_m)$ y $B' = \begin{pmatrix} b'_{11} & \cdots & b'_{1n} \\ b'_{21} & \cdots & b'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b'_{m1} & \cdots & b'_{mn} \end{pmatrix}$ es obvio que $Q'B'$ es una réplica de QA. Si QB representaba el output total obtenido en ese período, $Q'B'$ representa la totalidad de bienes producidos en ese período y que, dado el supuesto *(v)*, actuarán como input en el siguiente, por lo que serán éstos los bienes requeridos para poder mantener la producción en el siguiente período. Es decir, representa exclusivamente lo que va a ser utilizado para garantizar la producción en el futuro. Además, J. Von Neumann también opera con los supuestos *(iv)* y *(ix)*, tal que en todos los períodos se tiene que verificar que las relaciones entre las intensidades factoriales permanecen constantes, al igual que las relaciones entre los procesos productivos. Eso implica que, para que exita *crecimiento equilibrado* según J. Von Neumann

$$\frac{a_{ij}}{a_{ij+1}} = \frac{b'_{ij}}{b'_{ij+1}} \ y \ \frac{q_{ij}}{q_{ij+1}} = \frac{q'_{ij}}{q'_{ij+1}}, \qquad i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n, \qquad [20]$$

y esto implica que

$$\exists h > 0 \quad tal\,que \quad Q' = hQ. \qquad [21]$$

Por ello,

$$B' = \alpha^* \frac{1}{h} A, \qquad [22]$$

lo que implica que

$$b'_{ij} = \frac{\alpha^*}{h} a_{ij}, \qquad i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n \qquad [23]$$

Según expone el propio J. Von Neumann no van a existir cambios en la estructura productiva. Las intensidades factoriales permanecen constantes. Es por ello por lo que B' realmente es una réplica de A. Recoge la distribución de bienes máxima posible pero a su vez necesaria para poder generar un crecimiento equilibrado para el siguiente período.

Si QB es el total de lo producido dados los diferentes α_j existentes y que podrían ser empleados en períodos posteriores, $Q'B'$ representa lo que realmente se empleará dado que el sistema económico solo "aprovecha" $\alpha^* QA$. Por [10] y [11] en QB existirán excesos de producción o bienes libres que no se emplearán para aquellos bienes que presenten $\alpha_j > \alpha^*$.

Dado que con $\alpha^* = \min\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$, se tiene garantizada una matriz B' que es una réplica de A. Se podrán seguir usando los mismos procesos productivos indefinidamente, a la vez que se garantiza un output en el futuro que es una réplica del obtenido en cada período anterior. Como B' es una réplica de A y la economía crece siempre a la misma tasa α^*, en el modelo J. Von Neumann la tecnología permanecía constante durante todos los períodos con el objeto de mantener ese crecimiento equilibrado. Una vez decidido el proceso productivo a llevar a cabo y la intensidad con que se ejecutaría, los distintos coeficientes de los inputs a_{ij} permanecían fijos para cada proceso productivo y el output que se debía generar debería ser aquel que garantizase que todos y cada uno de los b'_{ij} fuesen igual de proporcionales a sus respectivos a_{ij}. Las intensidades factoriales relativas permanecían constantes, todos los bienes crecían indefinidamente a la misma tasa, pero esa tasa quedaba ya fijada en el primer período dada la tecnología inicial y venía determinada por la capacidad tecnológica del primer período. Podían crearse bienes en exceso, pero no entrarían como input en el período siguiente. Serían bienes libres. Además, había un límite para el crecimiento que venía fijado, precisamente, por aquel bien que era más difícil de reproducirse. En el modelo de crecimiento equilibrado de J. Von Neumann parecía no haber espacio para un cambio tecnológico o un progreso técnico y el crecimiento máximo posible estaba acotado por la tasa de crecimiento del bien con menor tasa de crecimiento.

3. EL PROGRESO TÉCNICO EN EL MODELO DE VON NEUMAN

En el apartando anterior se demostraba que el supuesto de constancia en las intensidades relativas de los distintos procesos productivos y el supuesto de constancia en las intensidades factoriales de cada proceso productivo a lo largo del tiempo, provocaba que todos los bienes debían crecer a la misma tasa en todos los períodos de tiempo para que el sistema económico pudiese replicarse indefinidamente y así obtener un crecimiento equilibrado. En este apartado demostraremos que el supuesto de intensidades factoriales constantes no implica que no pueda existir Progreso Técnico. Bajo determinados supuestos demostraremos que la existencia de una tasa de crecimiento equilibrada en el modelo multisectorial de J. Von Neumann es compatible con la existencia de Progreso Técnico. Demostraremos, asimismo, que la tasa de crecimiento que se consigue bajo el supuesto de Progreso Técnico tiene un mínimo que coincide con la tasa de crecimiento equilibrado sin Progreso Técnico.

Para ello consideraremos que ya ha transcurrido un período y que se han verificado las condiciones [13] a [16] de crecimiento equilibrado, por lo que ya existe un B' tal que verifica [22] y se cumple la expresión [20] relativa a la constancia en las intensidades relativas de los factores y procesos productivos a lo largo del tiempo.

Se inicia un nuevo período en el que existe un avance tecnológico que permite obtener una matriz C de coeficientes c_{ij}, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$.

Definición: Se define **Progreso Técnico** como la introducción en el sistema económico de nuevos métodos productivos que generan para el mismo volumen de input dado incrementos en la producción, debidos a incrementos en la productividad de todos o algunos de los factores de producción superiores a los que se obtendrían con la tecnología del periodo anterior.

En particular, existirá Progreso Técnico cuando el output de cada bien supera al que se habría obtenido en el caso de operar con la tecnología del período anterior (α_j), es decir:

$$\sum_{i=1}^{m} q_i' c_{ij} > \alpha_j \sum_{i=1}^{m} q_i' b_{ij}', \quad j = 1,\ldots,n, \qquad [24]$$

$$\Rightarrow \exists \delta_j > 0 \ \textit{tal que} \ \sum_{i=1}^{m} q_i' c_{ij} = \alpha_j (1+\delta_j) \sum_{i=1}^{m} q_i' b_{ij}', \qquad [25]$$ [10]

siendo δ_j la innovación tecnológica en los procesos productivos del bien j que cumple la *Definición de Progreso Técnico*, por lo que expresado en matrices tenemos

$$(q_1',\ldots,q_m')\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = (q_1',\ldots,q_m')\begin{pmatrix} b_{11}' & \cdots & b_{1n}' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}' & \cdots & b_{mn}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1(1+\delta_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2(1+\delta_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_1(1+\delta_1) \end{pmatrix}$$

[26]

Aparentemente, la definición de Progreso Técnico representada por la existencia de δ_j es muy abierta, dado que sólo se impone la restricción de que el output de cada bien debe superar a su input en un coeficiente superior al que existiría en el caso de no aplicarse el Progreso Técnico (α_j). Sin embargo, con el objeto de demostrar que con Progreso Técnico puede seguir existiendo una tasa de crecimiento equilibrado, tal que en cada período la matriz de output es una réplica de la matriz de output del período anterior, se ha optado con considerar como matriz de inputs la matriz B' obtenida en el período anterior y que cumplía la condición de crecimiento equilibrado. Con ello se está considerando de forma implícita que en el nuevo período sea cual sea el Progreso Técnico que se aplique, siempre se deben mantener constantes las intensidades factoriales de cada proceso productivo, de lo que se deriva que δ_j realmente está representando un Progreso Técnico Neutral tipo Hicks.

Para que pueda existir crecimiento equilibrado según J. Von Neumann y, que por lo tanto, todo el sistema pueda crecer indefinidamente, la matriz diagonal integrada por los $\alpha_i(1+\delta_i)$ debe ser tal que se verifique que

$$\sum_{i=1}^{m} q_i'' c_{ij}' \quad \textit{debe ser proporcional a} \ \sum_{i=1}^{m} q_i' b_{ij}', \qquad j = 1,\ldots,n, \qquad [27]$$

siendo q_i'' la intensidad con la que se repetirán los procesos productivos en el período de tiempo que se inicia y c_{ij}' los coeficientes de output obtenidos en ese periodo pero que cumplen el supuesto *(iv)* y, por ello, garantizan el *crecimiento equilibrado* para el siguiente período.

[10] En los mismos términos que lo apuntado previamente, y por analogía con el modelo de J. Von Neumann, se ha optado por operar con δ_j ante la posibilidad de operar con δ_{ij} diferentes para cada proceso y para cada bien. El empleo de uno u otro coeficiente no alterará los resultados sobre la tasa máxima de crecimiento equilibrado.

Esto sólo será posible si dicha matriz diagonal tiene todos sus componentes iguales, es decir,

existe crecimiento equilibrado con Progreso Técnico si $\exists \delta^* > 0$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{m} q_i'' c_{ij}' = \alpha^* (1 + \delta^*) \sum_{i=1}^{m} q_i' b_{ij}', \qquad j = 1, \dots, n, \qquad [28]$$

cumpliendo q_i'' y c_{ij}' los supuestos *(iv)* y *(ix)* y donde

$$\alpha^* > 1, \qquad [15]$$

$$\alpha^* = \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \min\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m} q_i' b_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} q_i a_{ij}}\right\}, \qquad j = 1, \dots, n, \qquad [16]$$

y dado que por [25] $\delta_j > 0$, la expresión [28] se verifica para

$$\delta^* = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\} = \min\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m} q_i'' c_{ij}'' \alpha^*}{\sum_{i=1}^{m} q_i' b_{ij}'}\right\}, \qquad j = 1, \dots, n. \qquad [29][11]$$

De estas expresiones se deduce que se puede seguir obteniendo una tasa máxima de crecimiento equilibrado aunque se incorpore un progreso tecnológico que genere que la ratio output/input varíe de un período a otro[12]. La única condición es que todos los bienes estén sujetos a avances tecnológicos que impliquen incrementos en su output. Al igual que ocurría con el valor de α^*, el valor de δ^* tiene que ser igual al menor de todos los δ_j para poder garantizar un nivel y una distribución de output necesaria para actuar como input en el período siguiente. En cualquier caso, el nivel de Progreso Técnico que garantiza un

---

[11] Si, en lugar de haber operado con δ_j se hubiera considerado δ_{ij}, el δ_{ij} que garantizase el crecimiento equilibrado sería igual a

$$\delta^* = \min\{\delta_{ij}\} = \min\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m} q_i'' c_{ij}'' \alpha^*}{\sum_{i=1}^{m} q_i' b_{ij}'}\right\}, \qquad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

[12] Sin Progreso Técnico, en crecimiento equilibrado para cada período, se puede obtener la ratio

$$\frac{output_j}{input_j} = \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i' b_{ij}'}{\sum_{i=1}^{m} q_i a_{ij}} = \alpha^*, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Con Progreso Técnico, en crecimiento equilibrado para cada período, se obtiene la ratio

$$\frac{output_j}{input_j} = \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i'' c_{ij}'}{\sum_{i=1}^{m} q_i' b_{ij}'} = \alpha^* (1 + \delta^*), \qquad j = 1, \dots, n.$$

crecimiento equilibrado es aquel que toma el valor de δ *. Al tener que aplicarse un δ* igual para todos los bienes, todos ellos deben ser susceptibles a la aplicación de las diferentes mejoras tecnológicas. Sin embargo, esta condición no implica que el progreso técnico tenga que ser igual en todos los bienes. Pueden existir diferentes mejoras en los diferentes bienes, con diferentes incrementos en la producción de cada uno de ellos. Es decir, el sistema económico permite que, por las expresiones [25] y [29], puedan existir

$$\sum_{i=1}^{m} q_i'' c_{ij} > \alpha^*(1+\delta^*)\sum_{i=1}^{m} q_i' b_{ij}' \,, \qquad j = 1,\ldots,n. \qquad [30]$$

Existirían, en ese caso, bienes en exceso que no se utilizarían en la producción en los períodos siguientes. Serían, de nuevo, *bienes libres* por la aplicación de la siguiente *Regla de Von Neumann*:

$$\sum_{i=1}^{m} q_i' c_{ij} \geq \alpha^*(1+\delta^*)\sum_{i=1}^{m} q_i' b_{ij}' \,, \qquad j = 1,\ldots,n \qquad [31]$$

y para aquel bien que en [31] obtenga > se aplica $p_j=0$. [32]

Por lo tanto, con Progreso Técnico, puede seguir existiendo crecimiento equilibrado bajo la condición de que todos los bienes vean incrementada su producción como consecuencia de los diferentes avances tecnológicos.

Pero de las expresiones [27] a [32] se extrae una conclusión adicional: dado que en crecimiento equilibrado se aplican los mismos α *y δ *para todos los bienes y como -por la aplicación de los supuestos *(v)* y *(ix)*- Q' y Q'' son proporcionales,

$$\exists C' \ \textit{tal que} \ C' = \alpha^*(1+\delta^*)\frac{1}{g}B' \qquad [33]$$

donde B' y C' *son proporcionales,* siendo *g,* el factor de proporcionalidad entre Q'' y Q', C' la matriz *mxn* de coeficientes de output $c' = (c_{ij}')$ necesarios para poder replicar la producción en el siguiente período y obtenidos dada la tecnología inicial α *y el avance tecnológico δ *, y en donde $c_{ij}' = \alpha^*(1+\delta^*)\frac{1}{g}b_{ij}'$.

También se verifica que se mantienen las intensidades factoriales relativas de los inputs constantes, es decir,

$$\frac{a_{ij}}{a_{ij+1}} = \frac{b_{ij}'}{b_{ij+1}'} = \frac{c_{ij}'}{c_{ij+1}'} \qquad [34]$$

Ello implica que el sistema económico seguiría creciendo de forma equilibrada *adoptando continuamente Progresos Técnicos Neutrales tipo Hicks.* Esto significa que pueden existir diferentes Progresos Técnicos Neutrales tipo Hicks a lo largo del tiempo y seguir manteniéndose la condición de crecimiento equilibrado de J. Von Neumann. Por la expresión [25] y por la aplicación de la *Regla de los bienes libres* [31] y [32] no es necesario que exista el mismo Progreso Técnico Neutral tipo Hicks para cada bien y en todos los períodos de tiempo. La *Regla de los bienes libres* permite que se produzcan bienes en exceso. Si, en el período siguiente, algún output ahora input no es necesario, se convertiría en un bien libre. Por ello, cualquier incremento de output con el mismo input es incorporable. El Progreso Técnico genera una matriz de output *C* que no tiene porqué coincidir con la que necesita el sistema económico para poder replicarse (C'). Seguirá existiendo crecimiento mientras exista la cantidad mínima de inputs que permita llevan a cabo todos los procesos productivos en las proporciones fijadas. Ahora bien, sea cual sea el Progreso Técnico Neutral de Hicks que se incorpore, por las expresiones [28] y [34] se extrae que el automáticamente adopta el sistema económico es el menor de todos en cada período[13].

Por otra parte, también se comprueba que, dado que $\delta_j > 0$, la tasa máxima de crecimiento equilibrado con Progreso Técnico es, obviamente, siempre superior a la tasa máxima de crecimiento equilibrado sin Progreso Técnico. La tasa máxima de crecimiento equilibrado con Progreso Técnico está acotada inferiormente y el límite inferior es, precisamente, la tasa máxima de crecimiento equilibrado sin Progreso Técnico dado que:

$$\delta_j > 0,\ j = 1,\ldots,n, \quad \Rightarrow \quad \alpha^*(1+\delta^*) > \alpha^* \qquad [35]$$

El Progreso Técnico permite superar la restricción de que la tasa máxima de crecimiento equilibrado venga determinada precisamente por la tasa de crecimiento del bien con menor tasa de crecimiento.

La senda de crecimiento equilibrado con y sin Progreso Técnico

Cuando no existe Progreso Técnico, en una situación de crecimiento equilibrado, el output crece inicialmente a la tasa α^*que se fijó dada la tecnología inicial. Como no existe cambio tecnológico, todos los períodos se repite la misma situación tal que el output de equilibrio de cada período es α^* veces el output del período anterior. Por eso si definimos Y_t^* como el nivel de output de equilibrio que se obtiene aplicando la tasa de crecimiento equilibrado en el período *t*, $t = 0,\ldots,k$ y si -dado que las intensidades relativas de los procesos productivos permanecen constantes- se asume el caso particular en que $Q_{t-1} = Q_t = Q_{t+1} = Q$ se verifica:

$$Y_0 = QAX, \qquad [9]$$

$$Y_1^* = QB'X = \alpha^* QAX = \alpha^* Y_0, \qquad [35]$$

$$Y_2^* = \alpha^* QB'X = (\alpha^*)^2 QAX = (\alpha^*)^2 Y_0. \qquad [36]$$

En general,

$$Y_t^* = (\alpha^*)^t QAX = (\alpha^*)^k Y_0. \qquad [37]$$

Por ello, para cada período:

$$\frac{Y_1^*}{Y_0} = \frac{Y_2^*}{Y_1^*} = \cdots = \frac{Y_t^*}{Y_{t-1}^*} = \alpha^*, \text{ con } Y_0^* = Y_0, \qquad [38]$$

mientras que la tasa de crecimiento acumulada para cualquier período sería :

$$\frac{Y_t^*}{Y_0} = (\alpha^*)^t \qquad [39]$$

En cambio, con Progreso Técnico, aún partiendo de la misma situación inicial, y considerando que se produce un cambio tecnológico en el segundo período de tiempo, el nivel de output en equilibrio así como "el factor de crecimiento de cada período" y la tasa acumulada serían:

[13] Debe indicarse que, si bien bajo el punto de vista analítico, es posible la incorporación de cualquier tipo de Progreso Técnico, la condición de *crecimiento equilibrado* descrita en el modelo de J. Von Neumann implica, obligadamente, que el tipo de Progreso Técnico que únicamente pueda ser incorporado sea el Progreso Técnico Neutral de Hicks, dado que el *crecimiento equilibrado* implica constancia en las intensidades relativas de los coeficientes utilizados en cada proceso productivo. Cualquier otro tipo de Progreso Técnico rompe con esta condición dado que el modelo de J. Von Neumann considera que si se modifican las intensidades relativas de los coeficientes utilizados en el proceso productivo, se tendría que hablar de un nuevo proceso productivo. En consecuencia, la definición de *crecimiento equilibrado* de J. Von Neumann no tendría sentido. Ya no sería necesario en cada periodo garantizar un output proporcional al input, dado que el Progreso Técnico incorporado podría suponer ahorro en algunos de los inputs. Por ello, la inclusión de cualquier otro tipo de Progreso Técnico pasa obligadamente por modificar el concepto de *crecimiento equilibrado.*

$$Y_0 = QAX\,, \qquad [9]$$

$$Y_1^* = QB'X = \alpha * QAX = \alpha * Y_0\,, \qquad [40]$$

$$Y_2^* = \alpha * \left(1+\delta_2^*\right)QB'X = \left(\alpha *\right)^2\left(1+\delta_2^*\right)QAX = \left(\alpha *\right)^2\left(1+\delta_2^*\right)Y_0\,, \qquad [41]$$

$$Y_3^* = \alpha * \left(1+\delta_2^*\right)Y_2^* = \left(\alpha *\right)^3\left(1+\delta_2^*\right)^2 Y_0\,. \qquad [42]$$

En general,

$$Y_t^* = \left(\alpha *\right)^t\left(1+\delta_2^*\right)^{t-1} Y_0\,, \qquad [43]$$

donde δ_2^* representa la innovación tecnológica que se genera en el período 2 y que cumple [29]. Además:

$$\frac{Y_1^*}{Y_0} = \alpha * \neq \frac{Y_2^*}{Y_1^*} = \alpha * \left(1+\delta_2^*\right) = \frac{Y_3^*}{Y_2^*} = \alpha * \left(1+\delta_2^*\right) = \cdots = \frac{Y_k^*}{Y_{k-1}^*} = \alpha * \left(1+\delta_2^*\right), \qquad [44]$$

$$\frac{Y_t^*}{Y_0} = \left(\alpha *\right)^t\left(1+\delta_2^*\right)^{t-1} > \left(\alpha *\right)^t, \qquad \forall \delta_2^* > 0\,,\ \forall t = 1,\ldots,k \qquad [45]$$

Las expresiones [35] a [45] permiten comprobar que cuando no existe Progreso Técnico el factor de crecimiento de cada período es constante, por lo que la ratio output/input no varía. Existe una senda de crecimiento *uniforme* a lo largo de todos los períodos que describe una expansión geométrica del sistema. Con Progreso Técnico, en cambio, el coeficiente de expansión varía en el período en que se genera el Progreso Técnico, por lo que la ratio output/input varía entre ese período y el anterior. Se obtiene nuevamente una expansión geométrica de todo el sistema pero, a partir del momento en que se produce el Progreso Técnico, a un nivel superior y con un factor de crecimiento más elevado. El crecimiento acumulado es superior con Progreso Técnico y la diferencia es, precisamente, el Progreso Técnico generado en el segundo período.

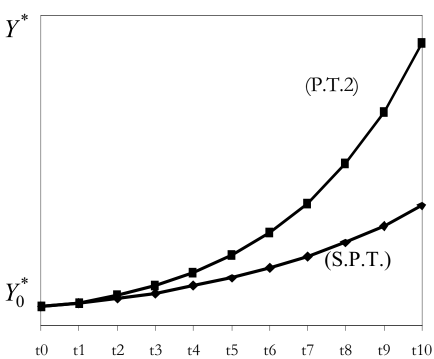

GRAFICO 1
Una posible senda de crecimiento máximo equilibrado con progreso técnico en el segundo período (P.T.2) y sin progreso técnico (S.P.T.).

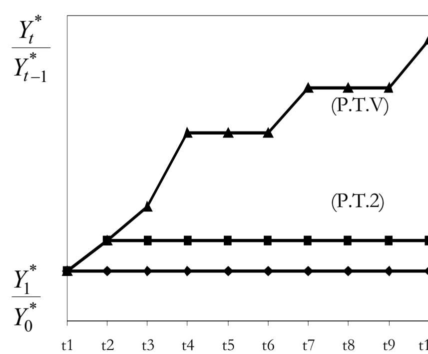

GRAFICO 2
Una posible senda de factores de crecimiento máximo equilibrado sin progreso técnico, con progreso técnico en el período 2 (P.T.2), y con progreso técnico en varios períodos (P.T.V).

La representación gráfica de las sendas de crecimiento en ambos casos permite obtener una referencia visual sobre las diferencias entre el crecimiento equilibrado con Progreso Técnico y sin Progreso Técnico[14].

Si existe un cambio tecnológico, a partir del momento t_2 ya se dispone de una nueva tecnología que permite que el sistema se expanda con el coeficiente $\alpha^*\left(1+\delta_2^*\right)$. Se genera un salto que determina valores de Y^* en cada período superiores a los que existirían en el caso de no haberse producido el cambio tecnológico. Como consecuencia, el valor de la ratio $\frac{Y_t^*}{Y_{t-1}^*}$ es superior a partir del período 2 y se mantiene a ese nivel. Cuando se considera que pueden existir diferentes cambios tecnológicos en diferentes períodos de tiempo los resultados cambian ligeramente. Con progresos técnicos diferentes en cada período, se pierde la propiedad de expansión geométrica uniforme del sistema económico, dado que para cada período la ratio output/input varía en función de los avances tecnológicos de cada período. Se obtiene una ruta en la que la tasa de expansión del sistema puede variar para cada período, tal como se refleja en el gráfico 2 por la línea P.T.V. En este caso, se siguen cumpliendo [9], [40] y [41] para Y_0, Y_1^* e Y_2^*. Sin embargo:

$$Y_3^* = \alpha^*\left(1+\delta_2^*\right)\left(1+\delta_3^*\right)Y_2^* = (\alpha^*)^3\left(1+\delta_2^*\right)^2\left(1+\delta_3^*\right)Y_0, \qquad [46]$$

$$\vdots$$

$$Y_k^* = (\alpha^*)^k\left(1+\delta_2^*\right)^{k-1}\left(1+\delta_3^*\right)^{k-2}\cdots\left(1+\delta_k^*\right)Y_0, \qquad [47]$$

y las tasas de crecimiento, tanto para cada período como la acumulada, serían

$$\frac{Y_1^*}{Y_0} = \alpha^* \neq \frac{Y_2^*}{Y_1^*} = \alpha^*\left(1+\delta_2^*\right) \neq \frac{Y_3^*}{Y_2^*} = \alpha^*\left(1+\delta_2^*\right)\left(1+\delta_3^*\right) \neq \cdots \neq \frac{Y_k^*}{Y_{k-1}^*} = \alpha^*\prod_{t=2}^{k}\left(1+\delta_t^*\right), \qquad [48]$$

$$\frac{Y_t^*}{Y_0} = (\alpha^*)^t\cdot\left(1+\delta_2^*\right)^{t-1}\cdot\left(1+\delta_3^*\right)^{t-2}\cdots\cdots\left(1+\delta_t^*\right) = (\alpha^*)^t\cdot\prod_{l=2}^{t}\left(1+\delta_l\right)^{t-l+1}, \qquad [49]$$

siendo,

$$(\alpha^*)^t\cdot\prod_{l=2}^{t}\left(1+\delta_l\right)^{t-l+1} > (\alpha^*)^t\cdot\left(1+\delta_2\right)^{t-1} > (\alpha^*)^t, \qquad t=1,\ldots,k, \qquad [50]$$

si existe algún $\delta_l^* > 0$.

4. LA REGLA DE LA RENTABILIDAD

Debe recordarse que $\alpha^*\left(1+\delta_2^*\right)$[15] es un factor de expansión máximo del sistema económico en cada período que permite el crecimiento equilibrado. Pero el que sea un valor máximo no significa que el sistema económico vaya a crecer a dicha tasa. Es decir, las expresiones [15],[16], [29], [31] y [32] están marcando una restricción. Recogen todo un conjunto de factores de crecimiento viables en el que $\alpha^*\left(1+\delta^*\right)$ es el máximo posible. Para

[14] Para la elaboración de las rutas de crecimiento equilibrado de los gráficos 1 y 2 se ha considerado α =1.2, δ_2 =1.1 y, adicionalmente, en el caso de la ruta P.T.V., δ_t igual a 1.1, 1.2, 1.1 y 1.1 en los períodos 3, 4, 7 y 10 respectivamente.

[15] O, en términos análogos, cuando existen diferentes progresos tecnológicos en diferentes periodos de tiempo, $\alpha^*\prod_{t=2}^{k}\left(1+\delta_t^*\right)$.

poder determinar realmente el coeficiente de expansión del sistema es necesario un segundo criterio de elección que permita seleccionar una tasa de crecimiento de todas las viables. El segundo criterio introducido por J. Von Neumann, en términos análogos a la *Regla de los bienes libres* es la denominada *Regla de la rentabilidad.* Dicha regla, para el período en que no hay Progreso Técnico vendría dada por:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_j \leq \beta^* \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \qquad i=1,\dots,m \tag{51}$$

y para aquel proceso i que en [51] obtenga < se aplica $q_i=0$, [52]
teniendo presente que:

$$p_j \geq 0, \tag{53}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \geq 0. \tag{54}$$ [16]

Esta *Regla* viene a indicar que en equilibrio sólo se emplearán aquellos procesos productivos que obtengan un beneficio igual a cero una vez pagado el tipo de interés del sistema económico β^*. Si el beneficio fuese inferior, ese proceso no sería rentable por lo que no se emplearía, lo que provoca que $q_i=0$ para ese proceso[17].

Esto implícitamente indica que cada proceso productivo puede generar una determinada rentabilidad que no tiene porqué coincidir con la tasa de interés del sistema económico.

$$\exists \beta_i \ \ \textit{tal que} \ \sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_j = \beta_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j, \quad i=1,\dots,m. \tag{55}$$

Expresándolo de forma matricial tenemos:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \beta m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Dado que existen diferentes β_i, para garantizar el máximo crecimiento es necesario que la tasa de rentabilidad de los procesos productivos seleccionados sea la máxima de todos los procesos productivos disponibles, lo que implica que:

$$\beta^* = \max\{\beta_1,\dots,\beta_m\} = \max\left\{ \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j} \right\}, \qquad i=1,\dots,m. \tag{57}$$

Si consideramos que existe un Progreso Técnico en el periodo 2, la tasa de rentabilidad de los procesos productivos elegidos deberá ser:

$$\gamma^* = \max\{\gamma_1,\dots,\gamma_m\} = \max\left\{ \frac{\sum_{j=1}^{n} c_{ij} p_j}{\sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_j} \right\}, \qquad i=1,\dots,m, \tag{58}$$

---

16 Para evitar aquella situación en que $p_1 = \cdots = p_n = 0$

17 Beneficios superiores no serían posibles dado que un beneficio positivo atraería a competidores a usar ese proceso productivo y no existiría equilibrio.

dado que, en este caso la *Regla de Rentabilidad* vendría dada por:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j c_{ij} \leq \gamma^*(1+\delta^*)\sum_{j=1}^{n} p_j b_{ij}\ , \qquad i=1,\ldots,m \qquad [59]$$

y para aquel proceso que en [59] obtenga < se aplica q_j*=0* [60]

siendo γ^* la tasa máxima de rentabilidad de los procesos productivos en el período en que se produce Progreso Técnico.

5. EL CRECIMIENTO EQUILIBRADO

El modelo asume que a_{ij}, b_{ij} y c_{ij} están dados, mientras que los valores de α^* *y* β^* son desconocidos, por lo que δ^* y γ^* también lo serán. Por ello, se debe resolver el problema expresado por [5], [6], [17], [18], [31], [32], [51]-[54], [59] y [60] teniendo en cuenta [16] y [29].

La resolución de este sistema es muy similar a la de J. Von Neumann, por lo que a continuación se expone brevemente para el caso de que exista Progreso Técnico.

Sea Q'^* un vector de procesos productivos cualquiera $(q_1'^*,\ldots,q_m'^*)$ del periodo 1 en el que se desarrolla un Progreso Técnico Neutral tipo Hicks, cada uno de los cuales verifica las expresiones [5] y [6], por lo que

$$q_i'^* \geq 0\ , \qquad [5']$$

$$\sum_{i=1}^{m} q_i'^* > 0\ . \qquad [6']$$

De forma análoga, sea P^* un vector de precios $(p_1^*,\ldots,p_m^*)$ del periodo 1 en el que se desarrolla un Progreso Técnico Neutral tipo Hicks, cada uno de los cuales verifica las expresiones [53] y [54], por lo que

$$p_j^* \geq 0\ , \qquad [53']$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j^* \geq 0\ . \qquad [54']$$

Sea:

$$\phi(Q_i'^*, P_j^*) = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} q_i'^* c_{ij} p_j^*}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} q_i'^* b_{ij}' p_j^*}\ . \qquad [61]$$

Y sean, además, $Q'=(q_1',\ldots,q_m')$ y $P=(p_1,\ldots,p_n)$, las soluciones hipotéticas.

En ese caso, bajo las condiciones descritas en la *Regla de los bienes libres* y la *Regla de la rentabilidad* se obtiene que:

$\phi(Q', P^*)$ alcanza su valor mínimo para P^* si $P^*=P$, [62]

$\phi(Q'^*, P)$ alcanza su valor máximo para Q'^* si $Q'^*=Q'$, [63]

y, dados, [29], [31], [32], [58], [59] y [60] se obtiene:

$$\alpha^*(1+\delta^*) = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} q_i' c_{ij}\right] p_j}{\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} q_i' b_{ij}'\right] p_j} = \phi(q', p) \qquad [64]$$

y

$$\gamma^* = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} c_{ij} p_j\right] q'_i}{\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} b'_{ij} p_j\right] q'_i} = \phi(q', p). \qquad [65]$$

Se verifica, por tanto, que

$$\alpha^*(1+\delta^*) = \gamma^* = \phi(Q', P'), \qquad [66]$$

al igual que ocurre en el modelo de J. Von Neumann sin Progreso Técnico. La tasa máxima de crecimiento equilibrado con Progreso Técnico y la Rentabilidad mínima del sistema coinciden.

6. CONCLUSIONES

En 1937 J. Von Neumann publicaba un innovador trabajo en el que presentaba un modelo de crecimiento económico que, no sólo era multisectorial, sino que además, no imponía restricciones sobre las formas funcionales que determinaban el output en cada período. En cambio, sí introducía otros supuestos muy restrictivos: constancia en la intensidad con que se empleaban los diferentes procesos productivos y que cada proceso conllevase una determinada combinación de inputs. Ello implicaba que, para que pudiera existir un "coeficiente de expansión del sistema económico", todos los bienes deberían aparecer en el sistema económico en las mismas proporciones. Lo que se necesitaba en cada período debía ser una réplica de lo que se necesitó en el período anterior. En definitiva, el sistema económico se perpetuaba y prolongaba siempre en las mismas proporciones y a la misma tasa. Sin embargo, en este trabajo, se demuestra que esa tasa de expansión del sistema económico no tiene por qué ser la misma en todos los períodos de tiempo. Si existe Progreso Técnico, la tasa puede cambiar. Ahora bien, si se quiere garantizar el crecimiento equilibrado y mantener los supuestos del modelo multisectorial de J. Von Neumann, las intensidades factoriales deben permanecer constantes en todos los períodos. Eso implica que el único Progreso Técnico compatible con el modelo de J. Von Neumann es el Progreso Técnico Neutral según Hicks. Cualquier otro tipo de Progreso Técnico implica cambios en las intensidades factoriales de los inputs, por lo que, para que sea factible su incorporación dentro del modelo de J. Von Neumann, habría que romper con su definición de *crecimiento equilibrado* y buscar una definición alternativa que, sin embargo, permita el crecimiento sostenido del sistema económico.

BIBLIOGRAFÍA

Champernowne, D. G. (1945-1946), "A Note on J. Von Neumann's Article", *Review of Economic Studies,* vol. 13, pp. 10-18.

Dorfman, R., Samuelson, P.A. y Solow, R.M. (1958), *Linear Programming and Economic Analysis,* McGraw-Hill.

Koopmans, T. C. (1964), "Economic growth at a maximal rate", *Quarterly Journal of E·conomics,* vol. 78, pp. 355-394.

Von Neumann, J. (1937) , "Über ein Ökonomisches Gleichungs-system und eine Verallgemeinerung, des Brouwerschen Fixpunktsatzes", K. Menger (comp.), *Ergeb. eines Mathemat. Kolloq., vol. 8* [traducido al inglés como "A Model of General Economic Equilibrium", *Review of Economic Studies,* vol. 13 (1945-1946), pp. 1-9].

DOCUMENTOS DE TRABALLO XA PUBLICADOS.

ÁREA DE ANÁLISE ECONÓMICA

22. UN MODELO INTERTEMPORAL DE LA BALANZA POR CUENTA CORRIENTE DE LA ECONOMÍA ESPAÑOLA: LA RELEVANCIA DEL PROCESO DE FORMACIÓN DE EXPECTATIVAS CONSIDERADO. **(Belén Fernández Castro)**
23. UN MODELO EXPLICATIVO DE LA LOCALIZACIÓN REGIONAL DE LA INVERSIÓN EXTRANJERA DIRECTA. UNA APLICACIÓN A LA ECONOMÍA ESPAÑOLA. **(Raquel Díaz Vázquez)**
24. NITRATE POLLUTION IN INLAND WATERS: CAUSES, CONSEQUENCES AND POLICY. **(Raimundo Viejo Rubio)**
25. LA DEUDA CONVERTIBLE: UNA VISIÓN HISTÓRICA **(Alejandro M. Fernández Castro)**

26-CRECIMIENTO CON PROGRESO TÉCNICO EN EL MODELO DE JOHN VON NEUMANN **(Raquel Díaz Vázquez)**

ÁREA DE ECONOMÍA APLICADA

15. LO MACRO, LO MICRO Y LOS POLÍTICO EN LA NUEVA ECONOMÍA INSTITUCIONAL. **(Gonzalo Caballero)**
16. A EFICIENCIA TÉCNICA DAS EXPLOTACIÓNS LEITEIRAS NA COMARCA INTERIOR DA PROVINCIA DE A CORUÑA. INFLUENCIA DA CONCENTRACIÓN PARCELARIA. **(Alfonso Ribas Álvarez, Gonzalo Flores Calvete y Claudio López Garrido)**
17. DESARME ARANCELARIO DEL MERCADO GALLEGO Y EVOLUCIÓN DE LAS IMPORTACIONES DE BIENES. **(Iván López Martínez y Beatriz García-Carro Peña)**
18. A XEOGRAFÍA ECONÓMICA DOS SERVIZOS ÁS EMPRESAS EN ESPAÑA **(Manuel González López)**
19. THE EVOLUTION OF INSTITUTIONS AND STATE GOVERNING PUBLIC CHOICE IN THE SECOND HALF OF TWENTIETH-CENTURY SPAIN **(Gonzalo Caballero Miguez)**

ÁREA DE HISTORIA

11. GALICIA NOS TEMPOS DE MEDO E FAME: AUTOARQUÍA, SOCIEDADE E MERCADO NEGRO NO PRIMEIRO FRANQUISMO, 1936-1959. **(Raúl Soutelo Vázquez)**
12. ORGANIZACIÓN E MOBILIZACIÓN DOS TRABALLADORES DURANTE O FRANQUISMO. A FOLGA XERAL DE VIGO DO ANO 1972. **(Mario Domínguez Cabaleiro, José Gómez Alén, Pedro Lago Peñas y Víctor Santidrián Arias)**
13. EN TORNO Ó ELDUAYENISMO: REFLEXIÓNS SOBRE A POLÍTICA CLIENTELISTA NA PROVINCIA DE PONTEVEDRA. 1856-1879. **(Felipe Castro Pérez)**
14. AS ESTATÍSTICAS PARA O ESTUDIO DA AGRICULTURA GALEGA NO PRIMEIRO TERCIO DO SÉCULO XX. ANÁLISE CRÍTICA. **(David Soto Fernández)**
15. INNOVACIÓN TECNOLÓXICA NA AGRICULTURA GALEGA **(Antom Santos - Pablo Jacobo Durán García - Antonio Miguez Macho)**

ÁREA DE XEOGRAFÍA

9. A PRODUCCIÓN DE ESPACIO TURÍSTICO E DE OCIO NA MARXE NORTE DA RÍA DE PONTEVEDRA. **(Carlos Alberto Patiño Romarís)**
10. DESENVOLVEMENTO URBANO E DIFUSIÓN XEOLINGÜÍSTICA: ALGÚNS APUNTAMENTOS SOBRE O CASO GALLEGO. **(Carlos Valcárcel Riveiro)**
11. NACIONALISMO Y EDUCACIÓN GEOGRÁFICA EN LA ESPAÑA DEL SIGLO XX. UNA APROXIMACIÓN A TRAVÉS DE LOS MANUALES DE BACHILLERATO. **(Jacobo García Álvarez e Daniel Marías Martínez)**
12. NOVO SENTIDO DA LUTA DE CLASSES E DO CONTROL SOCIAL NO MEIO RURAL UMA CONTRIBUÇÃO À GEOGRAFIA DO CONFLITO CAPITAL X TRABALLO. **(Jorge Montenegro Gómez y Antonio Thomaz Júnior)**
13. MARKETING TERRITORIAL E ESPAÇOS VIRTUAIS A INDÚSTRIA DO TURISMO NOS AÇORES E NO SUDOESTE DA IRLANDA. **(João Sarmento)**

EDICIÓN ELECTRÓNICA
Tódolos documentos de traballo pódense descolgar libremnte da páxina web do instituto (www.usc.es/idega)

NORMAS PARA A REMISIÓN DE ORIXINAIS:

Deberán ser remitidos tres exemplares do traballo e unha copia en diskette ao Director do IDEGA: Avda. das Ciencias s/n. Campus Universitario Sur 15782 Santiago de Compostela, cumprindo coas seguintes normas:

1. A primeira páxina deberá incluir o título, o/os nome/s, enderezo/s, telefono/s, correo electrónico e institución/s ás que pertence o/os autor/es, un índice, 5 palabras chave ou descriptores, asií como dous resumos dun máximo de 200-250 palabras: un na língua na que estea escrita o traballo e outro en inglés.
2. O texto estará en interlineado 1,5 con marxes mínimas de tres centímetros, e cunha extensión máxima de cincuenta folios incluídas as notas e a bibliografía.
3. A bibliografía se presentará alfabéticamente ao final do texto seguindo o modelo: Apelidos e iniciais do autor en maiusculas, ano de publicación entre paréntese e distinguindo a, b, c, en caso de máis dunha obra do mesmo autor no mesmo ano. Título en cursiva. Os títulos de artigo irán entre aspas e os nomes das revistas en cursiva, lugar de publicación e editorial (en caso de libro), e, en caso de revista, volume e nº de revista seguido das páxinas inicial e final unidas por un guión.
4. As referencias bibliográficas no texto e nas notas ao pé seguirán os modelos habituais nas diferentes especialidades científicas.
5. O soporte informático empregado deberá ser Word (Office 97) para Windows 9x, Excell ou Acess.
6. A dirección do IDEGA acusará recibo dos orixinais e resolverá sobre a súa publicación nun prazo prudencial. Terán preferencia os traballos presentados ás Sesións Científicas do Instituto.

O IDEGA someterá tódolos traballos recibidos a avaliación. Serán criterios de selección o nivel científico e a contribución dos mesmos á análise da realidade socio-económica galega.